Feuille d'exercices de Probabilités - 2$^{\text{ème}}$ année - semestre S3

---

1 Rappels sur la loi normale

Exercice 1.1 Soit une v.a.r X

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(10;4)$. Calculer $\mathrm{P}(X < 14)$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$. Calculer $\mathrm{P}(|X-1| > 0{,}5)$.
3. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1;2)$. Calculer $a > 0$ tel que $\mathrm{P}(|X-1| > a) \leq 3\%$ (valeur arrondie à 0,01 près).

Exercice 1.2 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1;2)$ et $Y = 2X+1$. Déterminer la loi de Y et calculer $\mathrm{E}(Y^2)$.

Exercice 1.3 Une entreprise reçoit un chargement de 10 wagons de céréales. Les masses exprimées en tonnes de céréales tranportées sont des v.a. m_i indépendantes qui suivent la même loi normale $\mathcal{N}(55;0{,}25)$.

1. Déterminer la loi de la masse totale M_T du chargement.
2. Déterminer la loi de la masse moyenne $\overline{X}$ d'un wagon, ainsi qu'un réel $a > 0$ tel que $\mathrm{P}(\overline{X} \in [55-a;55+a]) > 95\%$ (valeur arrondie à 0,01 près).

Exercice 1.4 Dans la ville de Prairie la taille des individus suit une loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$ avec $\sigma > 0$. 33% des individus mesurent moins de 1,65m et 1,5% mesurent plus de 1,85m. Déterminer m et σ (valeurs arrondies à 0,001 près).

2 Distributions d'échantillonnage

Exercice 2.1 Lors d'une élection, un sondage sur un échantillon de 1000 personnes attribue au candidat Durand $50,2\%$ des voix. La publication des voix montre que ce candidat a obtenu au final $51,1\%$ des voix.

1. Définir les termes paramètre, échantillon, statistique, paramètre, distribution d'échantillonage. Donner 4 exemples de statistiques.
2. Reconnaitre dans l'énoncé la population et la variable étudiés ainsi que sa loi, la statistique utilisée.

Exercice 2.2 Soit un entier $n \geq 1$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon d'une loi parente normale de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$. On considère les variables

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S_n'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 \qquad V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_n}\right)^2 \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_n}\right)^2$$

1. Nommer les v.a. $\overline{X_n}$, V_n, S_n^2.
2. Donner les lois des variables $\overline{X_n}$, $\frac{n}{\sigma^2}S_n'^2$, $\frac{n}{\sigma^2}V_n$, $\frac{n-1}{\sigma^2}S_n^2$

Exercice 2.3 Lors d'un examen, les notes sont distribuées selon une loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$ avec $m = 10$ et $\sigma = 5$.

1. Pour un échantillon de taille $n = 25$, calculer $\mathrm{P}(9{,}5 \leq \overline{X_n} \leq 11)$. Que de vient cette probabilité pour un échantillon de taille $n = 100$? Commenter.
2. Pour un échantillon de taille $n = 25$, évaluer $\mathrm{P}(S_n^2 > 34{,}58)$ et résoudre $\mathrm{P}(S_n'^2 > a) = 0{,}05$.

Exercice 2.4 Six personnes, trois hommes et trois femmes montent dans un ascenseur dont le poids maximum autorisé est de 450 kg. Le poids en kg des hommes (resp. des femmes) suit une loi normale avec $m = 77$ et $\sigma = 12$ (resp. $m = 63$ et $\sigma = 10$).

1. Déterminer les lois du poids total et du poids moyen du groupe .
2. Calculer la probabilité que le poids total dépasse les 450 kg.
3. En suivant le scénario pessimiste d'un poids par personne de paramètres $m = 77$ et $\sigma = 12$, on adopte un coefficient de sécurité et le poids maximal réel est en fait supérieur. Calculer ce dernier pour que la probabilité que celui-ci soit dépassé ne soit pas supérieure à 0,5% (on donnera la valeur arrondie aux 10 kg sup).

Exercice 2.5 Les bouteilles de bières sortant d'une usine ont une contenance moyenne de 300 ml avec un écart-type de 5 ml. Elles sont vendues en pack de 6.

1. Déterminer l'écart-type de la contenance moyenne d'une bouteille dans un pack.
2. On suppose la contenance des bouteilles distribuée selon une loi normale. Quelle valeur la contenance moyenne des bouteilles d'un pack de 6 a-t-elle 1,7% de chances de dépasser ? (arrondie à 0,1 ml)

Exercice 2.6 On considère un lot de billets de banque : 40 de 50 euros et 60 de 20 euros. On prélève des échantillons de 3 billets au hasard et avec replacement.

1. Calculer la moyenne m et la variance σ^2 dans cette population.
2. Combien y-a-t-il d'échantillons possibles (billets distincts) ? Sur un échantillon $(50, 20, 20)$, calculer les réalisations de la moyenne, variance et variance corrigée d'échantillon.
3. Que trouve-t-on si on calcule les moyennes de ces trois grandeurs sur tous les échantillons ?

3 Convergence de variables aléatoires

Pour l'énoncé qui suit reprendre votre cours.

Exercice 3.1 On effectue une suite infinie de lancers indépendants d'un dé équilibré à 6 faces. Pour $n \geq 1$, on note $\overline{X_n}$ la moyenne des n premiers lancers.

1. Calculer les espérances et variances des variables X_1 et $\overline{X_n}$.
2. Montrer que la suite $(\overline{X_n})$ converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers un réel m à préciser :
   (a) $\overline{X_n} \xrightarrow{\mathrm{P}} m$ en vous servant de la L.Faible D.G.N.
   (b) $\overline{X_n} \xrightarrow{L^2} m$ en calculant $\mathrm{E}(\overline{X_n})$, $\mathrm{Var}(\overline{X_n})$ et en vous servant d'une proposition du cours
   (c) $\overline{X_n} \xrightarrow{p.s.} m$ en vous servant de la L. Forte D.G.N.
   (d) $\overline{X_n} \xrightarrow{loi} m$ en vous servant des questions 2b et 2c.
3. En utilisant B.T., déterminer n pour que $\mathrm{P}(3{,}4 \leq \overline{X_n} \leq 3{,}6) \geq 0{,}8$.

Exercice 3.2 Soit une suite i.i.d. (X_n) une suite i.i.d. de carré intégrable, de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$.

1. Montrer que la variable $S_n'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2$ converge p.s, en probabilité et en loi. (Indic : on pourra poser $Y_n = (X_i - m)^2$).
2. Montrer que si $\mu_4 = \mathrm{E}((X_1 - m)^4)$ est définie, on a la convergence en moyenne quadratique.

Exercice 3.3 On considère la suite de v.a. (X_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$ et $\mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$.

1. Pour $\varepsilon > 0$, que vaut $\mathrm{P}(|X_n| > \varepsilon)$? En déduire que cette suite converge vers 0 en probabilité.
2. Calculer $\mathrm{E}(X_n)$ et $\mathrm{Var}(X_n)$ et en déduire qu'elle ne converge pas en moyenne quadratique.

Exercice 3.4 On considère une suite (λ_n) de réels positifs admettant une limite éventuellement infinie, ainsi qu'une suite de v.a. (X_n) de loi $\mathcal{E}(\lambda_n)$.

1. Étudier la convergence en loi de cette suite (On calculera et on représentera la fonction le répartition F_{X_n} et on cherchera sa limite).
2. Étudier la convergence de cette suite vers 0 en probabilité, puis en moyenne quadratique.

Exercice 3.5 On contrôle un lot de $n = 1000$ ordinateurs. On suppose que 1% d'entre-eux connaitront une panne dans le mois. On pose pour $i = 1, \ldots, 1000$, $X_i = 1$ si le i-iìeme ordinatur tombe en panne et 0 sinon, et pour $n \geq 1$ entier, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\overline{X_n} = S_n/n$.

1. Que désignent les v.a. S_n et $\overline{X_n}$? Déterminer la loi de S_n. Calculer la moyenne et la variance de la variable X_1.
2. Déteminer à l'aide du TLC une valeur approchée de la probabilité que la fréquence de panne parmi les ordinateurs sur ce mois soit comprise entre 0,5% et 1,5% (arrondie à $0,1\%$ près).

Exercice 3.6 (Suite de l'ex 3.2). Soit une suite i.i.d. (X_n) une suite i.i.d. de v.a. de carré intégrable, de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$. On considère les variables $S_n'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2$, $V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X_n}\right)^2$ et $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2$.

1. Montrer en développant $\sum_{i=1}^{n} \left((X_i - m) - (\overline{X_n} - m)\right)^2$ que $V_n = S_n'^2 - \left(\overline{X_n} - m\right)^2$.
2. En utilisant un théorème de continuité, montrer que $\left(\overline{X_n} - m\right)^2$ converge p.s, L^2, en probabilité et en loi.
3. En déduire que V_n et S_n^2 convergent p.s, en probabilité et en loi.

Exercice 3.7 Une école compte 2000 élèves et le gérant du restaurant scolaire a observé qu'en moyenne 60% des élèves fréquentent son restaurant. Combien doit-il prévoir de repas pour que la probabilité d'en manquer soit inférieure à $0,28\%$?

Exercice 3.8 Après la panne d'un de ses avions la compagnie Zoé Airlines veut évacuer les 400 passagers vers deux avions identiques plus petits de n places chacun. Les passagers se répartissent au hasard dans ces deux avions en nombre X et Y. On suppose bien sûr X et Y inférieures à 400, $n \geq 200$ et qu'un passager ayant choisi un avion ne peut se reporter sur l'autre.

1. Donner en justifiant la loi des variables X et Y. Par quelle loi continue peut-on approcher cette loi ?
2. Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'un voyageur n'ait pas de place soit inférieure à 1 pour 1000.

Exercice 3.9 Soit une suite i.i.d. (X_n) une suite i.i.d. de v.a. de carré intégrable, de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$. On considère les variables $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$. On rappelle ici que $\overline{X_n}$ et S_n^2. On pose $S_n = \sqrt{S_n^2}$ et on considère la variable :

$$T_n = \frac{\overline{X_n} - m}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$$

1. Montrer en utilisant le TLC que la variable $Z_n = \sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - m}{\sigma}$ converge en loi.
2. On rappelle que $S_n^2 \xrightarrow{loi} \sigma^2$ (rappelez pourquoi). En utilisant la continuité de $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto \sigma/\sqrt{n}$, montrer que S_n et σ/S_n convergent en loi.
3. En remarquant que $T_n = Z_n \times \frac{\sigma}{S_n}$ et en utilisant le th. de Slutsky, montrer que T_n converge en loi.
4. On suppose la loi de (X_n) gaussienne et on pose $Y_n = \frac{n-1}{\sigma^2}S_n^2$.
   (a) Rappeler la loi de Y_n.
   (b) En remarquant que $T_n = \frac{Z_n}{\sqrt{\frac{Y_n}{n-1}}}$ donner la loi de T_n. Que devient ce résultat pour grand ?
   (On rappelle que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$ et $Y \hookrightarrow \chi^2_{\text{n}}$ sont deux v.a. indép. alors $X/\sqrt{Y/n} \hookrightarrow t_n$, loi de Student).

Exercice 3.10 Dans une population les individus possèdent une caractèristique c dans une proportion $p \in]0;1[$ inconnue. Pour la calculer on utilise des échantillons $(X_1, \ldots, X_n)$ de taille $n \geq 30$ et un estimateur $\widehat{p_n} = \overline{X_n}$. On cherche à évaluer pour $t > 0$, la probabilité

$$A_n = \mathrm{P}\left(\left[\widehat{p_n} - t\sqrt{\frac{\widehat{p_n}(1-\widehat{p_n})}{n}}; \widehat{p_n} - t\sqrt{\frac{\widehat{p_n}(1-\widehat{p_n})}{n}}\right]\right)$$

1. Montrer que ce problème revient à étudier la loi de $Z_n = \frac{p - \widehat{p_n}}{\sqrt{\frac{\widehat{p_n}(1-\widehat{p_n})}{n}}}$.
2. Montrer que $X_n = \frac{\widehat{p_n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ et $-X_n$ convergent en loi.
3. En utilisant la continuité de $t \mapsto \sqrt{t(1-t)}$, montrer que $Y_n = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\widehat{p_n}(1-\widehat{p_n})}}$ converge en loi.
4. En déduire que Z_n converge en loi et déterminer la limite de p_n pour n grand.

Éléments de réponse

1 Rappels sur la loi normale

Exercice 1.1 Soit une v.a.r X

1. $X \hookrightarrow \mathcal{N}(10; 4)$. $\mathrm{P}(X < 14) \simeq 0{,}97725$.
2. $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$. $\mathrm{P}(|X-1| > 0{,}5) = 1 - \Phi(1{,}5) + \Phi(0{,}5) \simeq 0{,}75827$.
3. $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1; 2)$, $\mathrm{P}(|X-1| > a) \leq 3\%$. $a \geq 3{,}07$

Exercice 1.2 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1; 2)$ et $Y = 2X + 1$: chgt affine donc $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m; \sigma^2)$, $m = 2\mathrm{E}(X) + 1 = 3$, $\sigma^2 = 4\,\mathrm{Var}(X) = 8$, $\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{Var}(Y) + (\mathrm{E}(Y))^2 = 17$.

Exercice 1.3 Une entreprise reçoit un chargement de 10 wagons de céréales. Les masses exprimées en tonnes de céréales tranportées sont des v.a. m_i indépendantes qui suivent la même loi normale $\mathcal{N}(55; 0{,}25)$.

1. Masse totale : par indép. des m_i, $M_T = \sum_{i=1}^{10} m_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m; \sigma^2)$ avec $m = \sum_{i=1}^{10} \mathrm{E}(m_i) = 550$,
   $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{10} \mathrm{Var}(m_i) = 2{,}5$.
2. Masse moyenne par wagon : $\overline{X} = \frac{M_T}{10} \hookrightarrow \mathcal{N}(m'; \sigma'^2)$ avec $m' = m/10 = 55$ et $\sigma'^2 = \sigma^2/100 = 0{,}025$.
   Pour $\mathrm{P}(\overline{X} \in [55 - a; 55 + a]) > 95\%$, $a \geq 1{,}96\,\sigma' \simeq 0{,}31$.

Exercice 1.4 X taille en m. $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m; \sigma^2)$ avec $\sigma > 0$, $\mathrm{P}(X \leq 0{,}65) = 0{,}33$, $\mathrm{P}(X \geq 1{,}85) = 0{,}015$ d'où $m \simeq 1{,}684$ et $\sigma \simeq 0{,}077$.

2 Distributions d'échantillonnage

Exercice 2.1 Lors d'une élection, un sondage sur un échantillon de 1000 personnes attribue au candidat Durand $50,2\%$ des voix. La publication des voix montre que ce candidat a obtenu au final $51,1\%$ des voix.

1. paramètre=caractéristique de la population, statistique=toute fonction des v.a. de l'échantillon, distribution d'échantillonage=la distribution d'une statistique qd on fait varier les échantillons aléat. Ex : moyenne empirique, variance empirique, variance emp. corrigée, fonction de répart. empirique.
2. Dans l'énoncé : population=les votants, v.a. étudiée="vote Durand Oui/Non", sa loi=Bernoulli de param. $p = 0,511$. Statistique utilisée=proportion dans l'échant c.a.d $\overline{X_n}$.

Exercice 2.2 Soit un entier $n \geq 1$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon d'une loi parente normale de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$. On considère les variables

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S_n'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2 \qquad V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X_n}\right)^2 \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X_n}\right)^2$$

1. $\overline{X_n}$ moyenne empirique, V_n variance empirique, S_n^2 variance empirique corrigée.
2. $\overline{X_n} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m; \frac{\sigma^2}{n}\right)$, $\frac{n}{\sigma^2} S_n'^2 \hookrightarrow \chi^2_n$, $\frac{n}{\sigma^2} V_n \hookrightarrow \chi^2_{n-1}$, $\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \hookrightarrow \chi^2_{n-1}$

Exercice 2.3 Lors d'un examen, les notes sont distribuées selon une loi normale $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$ avec $m = 10$ et $\sigma = 5$.

1. Pour $n = 25$, $\overline{X_n} \hookrightarrow \mathcal{N}(10; 1)$ et $\mathrm{P}(9{,}5 \leq \overline{X_n} \leq 11) \simeq 0{,}5328$. Pour $n = 100$,$\overline{X_n} \hookrightarrow \mathcal{N}(10; 0{,}25)$ et $\mathrm{P}(9{,}5 \leq \overline{X_n} \leq 11) \simeq 0{,}81859$: les notes sont moins dispersées donc il y en a plus dans l'intervalle $[9{,}5; 11]$.
2. Pour $n = 25$:
   a) $\frac{24}{25} S_n^2 \hookrightarrow \chi^2_{24}$ donc $\mathrm{P}(S_n^2 > 34{,}58) \simeq 0,1$
   b) $S_n'^2 \hookrightarrow \chi^2_{25}$, $\mathrm{P}(S_n'^2 > a) = 0{,}05 \Rightarrow a \simeq 37{,}65$. $\mathrm{P}(S_n^2 > a) = 0{,}05 \Rightarrow a \simeq 37{,}94$

Exercice 2.4 Six personnes, trois hommes et trois femmes montent dans un ascenseur dont le poids maximum autorisé est de 450 kg. Le poids en kg des hommes (resp. des femmes) suit une loi normale avec $m = 77$ et $\sigma = 12$ (resp. $m = 63$ et $\sigma = 10$).

$(X_1, \dots, X_6)$ échant de $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$,

1. $m = 3\,m_1 + 3\,m_2 = 420$, $\sigma^2 = 3\,\sigma_1^2 + 3\,\sigma_2^2 = 732$, $S_6 = \sum_{i=1}^{6} X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m; \sigma^2)$ (masses sup indép). $\overline{X_6} \hookrightarrow \mathcal{N}(m/6; \sigma^2/36) = \mathcal{N}(70; 61/3)$
2. $\mathrm{P}(S_6 \geq 450) = 1 - \Phi(1{,}11) \simeq 0{,}1335$
3. $S_6 \hookrightarrow \mathcal{N}(450; 864)$, $\mathrm{P}(S_6 \geq M) \leq 0,005 \Leftrightarrow M \geq 530$ kg

Exercice 2.5 Les bouteilles de bières sortant d'une usine ont une contenance moyenne de 300 ml avec un écart-type de 5 ml. Elles sont vendues en pack de 6.

1. $5/\sqrt{6} \simeq 2{,}04$.
2. $V \hookrightarrow \mathcal{N}(300; 25/6)$. $P(V \geq M) = 0,017 \Leftrightarrow P(V \geq M) = 0,983$ soit $t \simeq 2{,}12$, $M \simeq 300 + 2{,}12 \times \frac{5}{\sqrt{6}} \simeq 304,3$ ml

Exercice 2.6 On considère un lot de billets de banque : 40 de 50 euros et 60 de 20 euros. On prélève des échantillons de 3 billets au hasard et avec replacement.

Soit X le montant d'un billet de banque dans la population.

1. $m = 32$, $\sigma^2 = 1240 - 32^2 = 216$ dans cette population.
2. $100^3 = 1\,000\,000$ échantillons possibles. Sur un échantillon $(50, 20, 20)$, $\overline{x_n} = 30$, $v_n = 1100 - 30^2 = 200$, $s_n^2 = \frac{3}{3-1} v_n = 300$
3. $\mathrm{E}(\overline{X_n}) = m = 32$, $\mathrm{E}(V_n) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 = 144$, $\mathrm{E}(S_n^2) = \sigma^2 = 216$.

3 Convergence de variables aléatoires

Exercice 3.1 On effectue une suite infinie de lancers indépendants d'un dé équilibré à 6 faces. Pour $n \geq 1$, on note $\overline{X_n}$ la moyenne des n premiers lancers.

1. $\mathrm{E}(\overline{X_n}) = \mathrm{E}(X_1) = \frac{1+6}{2} = 3{,}5$. $\mathrm{Var}(X_1) = \frac{35}{12}$, $\mathrm{Var}(\overline{X_n}) = \frac{35}{12n}$
2. En posant $m = 3{,}5$ et $\sigma^2 = 35/12$:
   (a) La suite est i.i.d. et de intégrable donc d'après la L.Faible D.G.N., $\forall \varepsilon > 0$, $\mathrm{P}([\overline{X_n} - m| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\overline{X_n} \xrightarrow{\mathrm{P}} m$.
   (b) $\mathrm{E}(\overline{X_n}) = m$, $\mathrm{Var}(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc d'après la prop. du cours $\overline{X_n} \xrightarrow{L^2} m$.
   (c) La suite est i.i.d. et intégrable donc d'après la L.Forte D.G.N. $\overline{X_n} \xrightarrow{\mathrm{P}} m$.
   (d) $\overline{X_n} \xrightarrow{L^2} m \Rightarrow \overline{X_n} \xrightarrow{loi} m$ et $\overline{X_n} \xrightarrow{p.s.} m \Rightarrow \overline{X_n} \xrightarrow{loi} m$
3. On pose $\varepsilon = 0{,}1$, $\mathrm{P}(|\overline{X_n} - m| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \geq 0{,}8$ donne $n \geq 1459$.

Exercice 3.2 Soit une suite i.i.d. (X_n) une suite i.i.d. de carré intégrable, de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$. Montrer que la variable $S_n'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2$ converge p.s, en probabilité et en loi.

1. On pose $Y_n = (X_i - m)^2$ suite i.i.d., $\mathrm{E}(Y_1) = \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 < +\infty$ donc d'après la L.Forte D.G.N. $S_n'^2 = \overline{Y_n} \xrightarrow{p.s.} \mathrm{E}(Y_1) = \sigma^2$ donc en proba. et en loi.
2. Si $\mu_4 = \mathrm{E}((X_1 - m)^4) < +\infty$, $\mathrm{Var}(Y_1) = \mu_4 - \sigma^4$ donc $\mathrm{Var}(S_n'^2) = \frac{\mu_4 - \sigma^4}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\mathrm{E}(S_n'^2) = \sigma^2$ donc $S_n'^2 \xrightarrow{L^2} \sigma^2$ donc en proba et en loi.

Exercice 3.3 On considère la suite de v.a. (X_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$ et $\mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$.

1. $\forall \varepsilon > 0$, $\mathrm{P}\left(|X_n| > \varepsilon\right) = \mathrm{P}(X_n = n) = 1/n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc cv en proba.
2. $\mathrm{E}(X_n) = 1$ mais $\mathrm{Var}(X_n) = n - 1$ qui ne converge pas vers 0 donc par de cv L^2.

Exercice 3.4 On considère une suite (λ_n) de réels positifs et admettant une limite éventuellement infinie, ainsi qu'une suite de v.a. (X_n) de loi $\mathcal{E}(\lambda_n)$.

Posons $\lambda = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n$

1. en loi : $F_{X_n}(t) = 1 - e^{-\lambda_n t}$ si $t \geq 0$, et 0 si $t < 0$ donc F_{X_n} admet pour lim une fct de répartition ssi $\lambda > 0$. Si $\lambda > 0$, on retrouve $\mathcal{E}(\lambda)$. Si $\lambda = +\infty$, F_{X_n} converge vers la loi de la v.a. certaine égale à 0 (en tt point $t \neq 0$)
2. En probabilité : d'après ce qui précède on a nécessairement $\lambda > 0$. Pour $\varepsilon > 0$, $\mathrm{P}(|X_n| > \varepsilon) = e^{-\lambda_n \varepsilon} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ssi $\lambda = +\infty$
3. En moyenne quadratique : nécessairement $\lambda > 0$. $\mathrm{Var}(X_n) = 1/\lambda_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ssi $\lambda = +\infty$ et dans ce cas $\mathrm{E}(X_n) = 1/\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $X_n \xrightarrow{loi} 0$.

Exercice 3.5 On contrôle un lot de $n = 1000$ ordinateurs. On suppose que 1% d'entre-eux connaitront une panne dans le mois. On pose pour $i = 1, \ldots, 1000$, $X_i = 1$ si le i-iìeme ordinateur tombe en panne et 0 sinon, et pour $n \geq 1$ entier, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et $\overline{X_n} = S_n/n$.

1. S_n et $\overline{X_n}$ désignent le nombre et la fréquence d'ordinateurs en panne parmi n. Par le schéma de Bernoulli, $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$, $m = \mathrm{E}(X_1) = p = 0{,}01$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) = p(1-p) = 0,0099$.
2. $n \geq 30$, $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$ donc $\mathrm{P}(|\overline{X_n} - p| \leq 0{,}005) \simeq 2\Phi\,(1{,}59) - 1 \simeq 88{,}8\%$.

Exercice 3.6 (Suite de l'ex 3.2). Soit une suite i.i.d. (X_n) une suite i.i.d. de v.a. de carré intégrable, de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$. On considère les variables $S_n'^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$, $V_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_n}\right)^2$ et $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$.

1. En développant :$V_n = S_n'^2 - 2\left(\overline{X_n} - m\right)\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - m) + \left(\overline{X_n} - m\right)^2$ avec $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - m) = 0$.
2. En utilisant la L. Forte D.G.N., $\overline{X_n} - m \xrightarrow{p.s.} 0$ et par cont. de $t \mapsto t^2$, $\left(\overline{X_n} - m\right)^2 \xrightarrow{p.s.} 0$ donc L^2, en probabilité et en loi.
3. D'après l'ex. 3.2), $S_n'^2 \xrightarrow{p.s.} \sigma^2$ donc $V_n = S_n'^2 - \left(\overline{X_n} - m\right)^2 \xrightarrow{p.s.} \sigma^2$. $S_n^2 = \frac{n}{n-1}V_n$ avec $\frac{n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc p.s. donc $S_n^2 \xrightarrow{p.s.} \sigma^2$ donc en probabilité et en loi.

Exercice 3.7 Soit X le nombre délèves se présentant au restaurant. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(2000; 0,6)$ (schéma de Bern.), $n > 30$, $np = 1200 > 5$, $nq = 800 > 5$ donc $\mathcal{B}(2000; 0,6)$ peut être approchée par $\mathcal{N}(1200; 480)$ d'où $\mathrm{P}(X > n) \leq 0,28\%$ conduit à $n \geq 1261$.

Exercice 3.8 Après la panne d'un de ses avions la compagnie Zoé Airlines veut évacuer les 400 passagers vers deux avions identiques plus petits de n places chacun. Les passagers se répartissent au hasard dans ces deux avions en nombre X et Y. On supposées bien sûr X et Y inférieures à 400, $n \geq 200$ et qu'un passager ayant choisi un avion ne peut se reporter sur l'autre.

1. Au hasard donc indép. des v.a. X_i de Bernouilli de param. $p = 1/2$ donc par le schéma de Bernoulli X et Y suivent $\mathcal{B}(400; 1/2)$. $N = 200 \geq 30$, $Np \geq 5$, $N(1-p) \geq 5$ donc d'après Moivre-Laplace, $\mathcal{B}(400; 1/2)$ approchée par $\mathcal{N}(200; 100)$.
2. $n \geq 200$ donc $X > n$ et $Y > n$ sont incompatibles, la proba. qu'au moins un passager reste sur le carreau vaut $\mathrm{P}(X > n) + \mathrm{P}(Y > n) = 2\mathrm{P}(X > n) \simeq 2\left(1 - \Phi\left(\frac{n-200}{10}\right)\right) \leq 0{,}001$ soit $\frac{n-200}{10} \geq 3{,}3$ ou encore $n \geq 233$.

Exercice 3.9 Soit une suite i.i.d. (X_n) une suite i.i.d. de v.a. de carré intégrable, de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$. On considère les variables $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$. On rappelle ici que $\overline{X_n}$ et S_n^2. On pose $S_n = \sqrt{S_n^2}$ et on considère

$$T_n = \frac{\overline{X_n} - m}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$$

1. Montrer en utilisant le TLC, $Z_n = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X_n} - m}{\sigma}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0.1)$.
2. $S_n^2 \xrightarrow{p.s.} \sigma^2 \Rightarrow S_n^2 \xrightarrow{loi} \sigma^2$ donc par continuité de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}^+$, $S_n \xrightarrow{loi} \sigma$ et par continuité de $t \mapsto \sigma/\sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\sigma/S_n \xrightarrow{loi} 1$.
3. $Z_n = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X_n} - m}{\sigma} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0;1)$, $\sigma/S_n \xrightarrow{loi} a = 1$ donc d'après le th. de Slutsky, $T_n = Z_n \times \frac{\sigma}{S_n} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0;1)$.
4. On suppose la loi de (X_n) gaussienne et on pose $Y_n = \frac{n-1}{\sigma^2}S_n^2$.
   (a) $Y_n \hookrightarrow \chi^2_{\text{n-1}}$.
   (b) $T_n = \frac{Z_n}{\sqrt{\frac{Y_n}{n-1}}} \hookrightarrow t_{n-1}$ qui converge en loi vers $\mathcal{N}(0;1)$.
   (On rappelle que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$ et $Y \hookrightarrow \chi^2_{\text{n}}$ sont deux v.a. indép. alors $X/\sqrt{Y/n} \hookrightarrow t_n$, loi de Student).

Exercice 3.10 Dans une population les individus possèdent une caractèristique c dans une proportion $p \in]0;1[$ inconnue. Pour la calculer on utilise des échantillons $(X_1, \dots, X_n)$ de taille $n \geq 30$ et un estimateur $\widehat{p_n} = \overline{X_n}$. On cherche à évaluer pour $t > 0$, la probabilité

$$A_n = \mathrm{P}\left(\left[\widehat{p_n} - t\sqrt{\frac{\widehat{p_n}(1-\widehat{p_n})}{n}}; \widehat{p_n} - t\sqrt{\frac{\widehat{p_n}(1-\widehat{p_n})}{n}}\right]\right)$$

1. $\forall t > 0$, $\mathrm{P}\left(\left[\widehat{p_n} - t\sqrt{\frac{\widehat{p_n}(1-\widehat{p_n})}{n}}; \widehat{p_n} - t\sqrt{\frac{\widehat{p_n}(1-\widehat{p_n})}{n}}\right]\right) = \mathrm{P}\left(-t \leq Z_n \leq t\right) = F_{Z_n}(t) - F_{Z_n}(-t)$.
2. D'après le TLC, $X_n = \frac{\widehat{p_n}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0;1)$. $\forall t$, $\mathrm{P}(-X_n \leq t) = 1-\mathrm{P}(X_n \geq -t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1-\Phi(-t) = \Phi(t)$ donc $-X_n \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0;1)$.
3. $t \mapsto \sqrt{t(1-t)}$ est cont. sur $]0;1[$ et $\widehat{p_n} \xrightarrow{p.s.} p$ donc $\sqrt{\widehat{p_n}(1-\widehat{p_n})} \xrightarrow{p.s.} \sqrt{p(1-p)} \neq 0$, par cont. de $t \mapsto 1/t$ pour $t > 0$, $Y_n = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\widehat{p_n}(1-\widehat{p_n})}} \xrightarrow{p.s.} 1$ donc en loi.
4. D'après Slutsky, $Z_n = X_nY_n \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0;1)$. $\forall t > 0$, $A_n = \mathrm{P}\left(-t \leq Z_n \leq t\right) = F_{Z_n}(t) - F_{Z_n}(-t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi(t) - \Phi(-t) = 2\Phi(t) - 1$.

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Pour t fixé, la table donne la valeur de $\Phi(t) = \int_{\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

Remarque : Pour $t < 0$, $\Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$.

Table de $1 - \Phi(t)$ pour les grandes valeurs de t

t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3	135.10^{-5}	9678.10^{-6}	687.10^{-6}	$483{,}5.10^{-6}$	337.10^{-6}	233.10^{-6}	159.10^{-6}	108.10^{-6}	724.10^{-7}	481.10^{-7}
4	317.10^{-7}	207.10^{-7}	$133{,}5.10^{-7}$	855.10^{-8}	542.10^{-8}	340.10^{-8}	2115.10^{-8}	130.10^{-8}	794.10^{-9}	480.10^{-9}
5	287.10^{-9}	170.10^{-9}	998.10^{-10}	580.10^{-10}	334.10^{-10}	190.10^{-10}	1075.10^{-10}	601.10^{-11}	333.10^{-11}	182.10^{-11}

Table du khi-2 : fractile d'ordre P (L'aire entre 0 et le fractile vaut P).

df	P 0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.102	0.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.83
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60	13.82
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84	16.27
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86	18.47
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75	20.51
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76	31.26
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	9.299	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.17	13.34	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	13.68	17.34	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31
21	8.034	8.897	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65	55.48
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70
31	14.46	15.66	17.54	19.28	21.43	25.39	30.34	35.89	41.42	44.99	48.23	52.19	55.00	61.10
32	15.13	16.36	18.29	20.07	22.27	26.30	31.34	36.97	42.58	46.19	49.48	53.49	56.33	62.49
33	15.82	17.07	19.05	20.87	23.11	27.22	32.34	38.06	43.75	47.40	50.73	54.78	57.65	63.87
34	16.50	17.79	19.81	21.66	23.95	28.14	33.34	39.14	44.90	48.60	51.97	56.06	58.96	65.25
35	17.19	18.51	20.57	22.47	24.80	29.05	34.34	40.22	46.06	49.80	53.20	57.34	60.27	66.62
36	17.89	19.23	21.34	23.27	25.64	29.97	35.34	41.30	47.21	51.00	54.44	58.62	61.58	67.98
37	18.59	19.96	22.11	24.07	26.49	30.89	36.34	42.38	48.36	52.19	55.67	59.89	62.88	69.35
38	19.29	20.69	22.88	24.88	27.34	31.81	37.34	43.46	49.51	53.38	56.90	61.16	64.18	70.70
39	20.00	21.43	23.65	25.70	28.20	32.74	38.34	44.54	50.66	54.57	58.12	62.43	65.48	72.06
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	39.34	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	49.33	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	59.33	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	69.33	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2	112.3
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	79.33	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3	124.8
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	89.33	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	137.2
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	99.33	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	149.4
120	83.85	86.92	91.57	95.70	100.6	109.2	119.3	130.1	140.2	146.6	152.2	159.0	163.6	173.6
140	100.7	104.0	109.1	113.7	119.0	128.4	139.3	150.9	161.8	168.6	174.6	181.8	186.8	197.4
160	117.7	121.3	126.9	131.8	137.5	147.6	159.3	171.7	183.3	190.5	196.9	204.5	209.8	221.0
180	134.9	138.8	144.7	150.0	156.2	166.9	179.3	192.4	204.7	212.3	219.0	227.1	232.6	244.4
200	152.2	156.4	162.7	168.3	174.8	186.2	199.3	213.1	226.0	234.0	241.1	249.4	255.3	267.5
240	187.3	192.0	199.0	205.1	212.4	224.9	239.3	254.4	268.5	277.1	284.8	293.9	300.2	313.4
300	240.7	246.0	253.9	260.9	269.1	283.1	299.3	316.1	331.8	341.4	349.9	359.9	366.8	381.4
400	330.9	337.2	346.5	354.6	364.2	380.6	399.3	418.7	436.6	447.6	457.3	468.7	476.6	493.1

Fractiles de la loi de Student

ν \ P	60.0%	66.7%	75.0%	80.0%	87.5%	90.0%	95.0%	97.5%	99.0%	99.5%	99.9%
1	0.325	0.577	1.000	1.376	2.414	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.289	0.500	0.816	1.061	1.604	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.277	0.476	0.765	0.978	1.423	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.271	0.464	0.741	0.941	1.344	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.267	0.457	0.727	0.920	1.301	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.265	0.453	0.718	0.906	1.273	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.263	0.449	0.711	0.896	1.254	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.262	0.447	0.706	0.889	1.240	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.261	0.445	0.703	0.883	1.230	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.260	0.444	0.700	0.879	1.221	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.260	0.443	0.697	0.876	1.214	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.259	0.442	0.695	0.873	1.209	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.259	0.441	0.694	0.870	1.204	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.258	0.440	0.692	0.868	1.200	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.258	0.439	0.691	0.866	1.197	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.258	0.439	0.690	0.865	1.194	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.257	0.438	0.689	0.863	1.191	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.257	0.438	0.688	0.862	1.189	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.257	0.438	0.688	0.861	1.187	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.257	0.437	0.687	0.860	1.185	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.257	0.437	0.686	0.859	1.183	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.256	0.437	0.686	0.858	1.182	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.256	0.436	0.685	0.858	1.180	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.256	0.436	0.685	0.857	1.179	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.256	0.436	0.684	0.856	1.178	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.256	0.436	0.684	0.856	1.177	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.256	0.435	0.684	0.855	1.176	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.256	0.435	0.683	0.855	1.175	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.256	0.435	0.683	0.854	1.174	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.256	0.435	0.683	0.854	1.173	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
35	0.255	0.434	0.682	0.852	1.170	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
40	0.255	0.434	0.681	0.851	1.167	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	0.255	0.434	0.680	0.850	1.165	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	0.255	0.433	0.679	0.849	1.164	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
55	0.255	0.433	0.679	0.848	1.163	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245
60	0.254	0.433	0.679	0.848	1.162	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
∞	0.253	0.431	0.674	0.842	1.150	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090