

**CONTRÔLE CONTINUE 1 - PROBABILITÉS ET STATISTIQUES**

*La calculatrice est autorisée. Tous les documents sont interdits sauf les tableaux ci-joints. Il est nécessaire de détailler les calculs pour obtenir tous les points.*

**Exercice 1:** [8 pts] Soit une variable aléatoire  $X$ .

1. Si  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1; 4)$ , calculer  $P(X > 5)$ .
2. Si  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1; 4)$ , calculer  $P(|X - 1| \leq 3)$ .
3. Si  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 4)$ , trouver une valeur réelle  $a$  telle que  $P(X > a) \leq 5\%$ .
4. Si  $X$  suit une loi normale telle que  $P(X > 4) = 0,8413$ ,  $P(X > 16) = 0,0228$ , déterminer les deux paramètres de cette loi normale.

**Exercice 2:** [4pts] Des machines fabriquent des crêpes à être empilées dans les paquets de 10. Supposons que chaque crêpe a une épaisseur qui suit la loi normale de paramètres  $m = 0,6\text{mm}$  et  $\sigma = 0,1$ .

1. Déterminer l'épaisseur moyenne et l'écart-type d'une crêpe dans un paquet.
2. Quelle valeur l'épaisseur des crêpes d'un paquet de 10 a-t-elle 2% de chances de dépasser?

**Exercice 3:** [6pts] Dans une population de  $n$  personnes, on observe que 1% des personnes sont contaminées par du virus C. On pose  $X_i = 1$  si la  $i$ -ième personne est touchée par le virus et 0 sinon. Pour  $n \geq 1$  entier, on définit

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad \overline{X}_n = \frac{S_n}{n}.$$

1. Que désignent les variables aléatoires  $S_n$  et  $X_n$ ?
2. Calculer les espérances et les variances de  $X_1$ , de  $\overline{X}_n$ .
3. Montrer que la suite  $(\overline{X}_n)_{n \geq 1}$  converge presque sûrement vers une constante  $m$  quand  $n$  tend vers l'infini? Que vaut la valeur  $m$ ?
4. À l'aide de l'inégalité Bienaymé-Tchebychev, déterminer  $n$  pour que la probabilité que la proportion de personnes étant contaminées par le virus C dans la population comprise entre 0,5% et 1,5% ne soit pas inférieure à 80% (arrondie à 0.1% près).

## Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Pour  $t$  fixé, la table donne la valeur de  $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$t$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

*Remarque :* Pour  $t < 0$ ,  $\Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$ .

Table de  $1 - \Phi(t)$  pour les grandes valeurs de  $t$

$t$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3	$135 \cdot 10^{-5}$	$9678 \cdot 10^{-6}$	$687 \cdot 10^{-6}$	$483,5 \cdot 10^{-6}$	$337 \cdot 10^{-6}$	$233 \cdot 10^{-6}$	$159 \cdot 10^{-6}$	$108 \cdot 10^{-6}$	$724 \cdot 10^{-7}$	$481 \cdot 10^{-7}$
4	$317 \cdot 10^{-7}$	$207 \cdot 10^{-7}$	$133,5 \cdot 10^{-7}$	$855 \cdot 10^{-8}$	$542 \cdot 10^{-8}$	$340 \cdot 10^{-8}$	$2115 \cdot 10^{-8}$	$130 \cdot 10^{-8}$	$794 \cdot 10^{-9}$	$480 \cdot 10^{-9}$
5	$287 \cdot 10^{-9}$	$170 \cdot 10^{-9}$	$998 \cdot 10^{-10}$	$580 \cdot 10^{-10}$	$334 \cdot 10^{-10}$	$190 \cdot 10^{-10}$	$1075 \cdot 10^{-10}$	$601 \cdot 10^{-11}$	$333 \cdot 10^{-11}$	$182 \cdot 10^{-11}$

Table du khi-2 : fractile d'ordre P (L'aire entre 0 et le fractile vaut P).

df	P													
	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.102	0.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.83
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60	13.82
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84	16.27
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86	18.47
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75	20.51
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76	31.26
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	9.299	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.17	13.34	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	13.68	17.34	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31
21	8.034	8.897	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65	55.48
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70
31	14.46	15.66	17.54	19.28	21.43	25.39	30.34	35.89	41.42	44.99	48.23	52.19	55.00	61.10
32	15.13	16.36	18.29	20.07	22.27	26.30	31.34	36.97	42.58	46.19	49.48	53.49	56.33	62.49
33	15.82	17.07	19.05	20.87	23.11	27.22	32.34	38.06	43.75	47.40	50.73	54.78	57.65	63.87
34	16.50	17.79	19.81	21.66	23.95	28.14	33.34	39.14	44.90	48.60	51.97	56.06	58.96	65.25
35	17.19	18.51	20.57	22.47	24.80	29.05	34.34	40.22	46.06	49.80	53.20	57.34	60.27	66.62
36	17.89	19.23	21.34	23.27	25.64	29.97	35.34	41.30	47.21	51.00	54.44	58.62	61.58	67.98
37	18.59	19.96	22.11	24.07	26.49	30.89	36.34	42.38	48.36	52.19	55.67	59.89	62.88	69.35
38	19.29	20.69	22.88	24.88	27.34	31.81	37.34	43.46	49.51	53.38	56.90	61.16	64.18	70.70
39	20.00	21.43	23.65	25.70	28.20	32.74	38.34	44.54	50.66	54.57	58.12	62.43	65.48	72.06
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	39.34	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	49.33	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	59.33	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	69.33	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2	112.3
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	79.33	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3	124.8
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	89.33	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	137.2
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	99.33	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	149.4
120	83.85	86.92	91.57	95.70	100.6	109.2	119.3	130.1	140.2	146.6	152.2	159.0	163.6	173.6
140	100.7	104.0	109.1	113.7	119.0	128.4	139.3	150.9	161.8	168.6	174.6	181.8	186.8	197.4
160	117.7	121.3	126.9	131.8	137.5	147.6	159.3	171.7	183.3	190.5	196.9	204.5	209.8	221.0
180	134.9	138.8	144.7	150.0	156.2	166.9	179.3	192.4	204.7	212.3	219.0	227.1	232.6	244.4
200	152.2	156.4	162.7	168.3	174.8	186.2	199.3	213.1	226.0	234.0	241.1	249.4	255.3	267.5
240	187.3	192.0	199.0	205.1	212.4	224.9	239.3	254.4	268.5	277.1	284.8	293.9	300.2	313.4
300	240.7	246.0	253.9	260.9	269.1	283.1	299.3	316.1	331.8	341.4	349.9	359.9	366.8	381.4
400	330.9	337.2	346.5	354.6	364.2	380.6	399.3	418.7	436.6	447.6	457.3	468.7	476.6	493.1